



TITLE:

# 不動点組合せ子の非循環性と関連する性質について (代数系アルゴリズムと言語および計算理論)

AUTHOR(S):

岩見, 宗弘

---

CITATION:

岩見, 宗弘. 不動点組合せ子の非循環性と関連する性質について (代数系アルゴリズムと言語および計算理論). 数理解析研究所講究録 2009, 1655: 96-100

ISSUE DATE:

2009-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140854>

RIGHT:

# 不動点組合せ子の非循環性に関連する性質 について\*

岩見 宗弘 (Munehiro Iwami)

島根大学 総合理工学部

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

Matsue, Shimane, Japan, 690-8504

e-mail: munehiro@cis.shimane-u.ac.jp

## 概要

本稿では、不動点組合せ子の非循環性、非基礎ループ性と停止性について述べる。最初に Turing の不動点組合せ子  $U[1]$ ,  $[5]$  が  $U$ -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つことを示す。次に Curry らの不動点組合せ子  $Y[1]$ ,  $[2]$  も  $Y$ -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つことを示す。さらに、我々は組合せ子  $U$  が持つ書換え規則の右辺を一般化した組合せ子  $U^n$  を提案し、 $U^n$ -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つことを示す。

## 1 準備

本稿の定義は文献 [3], [4], [6] に準ずる。

シグネチャ  $\mathcal{F}$  を引数を持つ関数記号の集合とする。引数が 0 の関数記号を定数と呼ぶ。変数の可算無限集合を  $\mathcal{V}$  とする ( $\mathcal{F} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ )。構文的等式を  $\equiv$  で表す。 $\mathcal{F}$  上の項の集合  $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  を次のように帰納的に定義する。(1)  $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  (2)  $f$  を  $n$  引数関数記号 ( $n \geq 0$ ),  $t_1, \dots, t_n \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  ならば  $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ 。変数を含まない項を基礎項といい、基礎項全体の集合を  $T(\mathcal{F})$  により表す。シグネチャ  $\mathcal{F} \cup \{\square\}$  上の項を文脈という。すなわち、0 個以上のホール  $\square$  を含む項の集合  $T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$  を次のように帰納的に定義する。(1)  $\mathcal{V} \subseteq T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ , (2)  $\square \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ , (3)  $f$  を  $n$  引数関数記号 ( $n \geq 0$ ),  $t_1, \dots, t_n \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$  ならば  $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\mathcal{F} \cup \{\square\}, \mathcal{V})$ 。文脈  $C$  がホール  $\square$  を 1 つだけ含むとき、 $C[\ ]$  と表す。 $C[t]$  は文脈  $C[\ ]$  のホール  $\square$  を項  $t$  で置き換えた結果である。 $t \equiv C[s]$  として表すことができるならば、 $s$  は  $t$  の部分項であるといい、 $s \leq t$  と表す。項  $t$  に出現する変数の集合を  $Var(t)$  と表す。代入  $\sigma$  を  $\mathcal{V}$  から  $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  への定義域  $Dom(\sigma) = \{x \in \mathcal{V} \mid \sigma(x) \neq x\}$  が有限である写像とする。すべての代入  $\sigma$  は項  $f(t_1, \dots, t_n) \in T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  に対して、 $\sigma(f(t_1, \dots, t_n)) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$  を満たす写像  $\sigma: T(\mathcal{F}, \mathcal{V}) \rightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  へ拡張できる。以下では、 $\sigma(t)$  の代わりに  $t\sigma$  という記法を使用

\*This paper is an extended abstract and the detailed version will be published elsewhere.

する。書換え規則  $l \rightarrow r$  は  $T(\mathcal{F}, \mathcal{V})$  上の方向付けられた等式であり、次の条件を満たす：  
 $l \notin \mathcal{V}$  かつ  $Var(r) \subseteq Var(l)$ 。項書換えシステム (TRS) は書換え規則の集合である。TRS  $\mathcal{R}$  により項  $s$  が項  $t$  に書換えられるとは、ある代入  $\sigma$ 、文脈  $C[]$  と書換え規則  $l \rightarrow r \in \mathcal{R}$  が存在し  $s \equiv C[l\sigma]$  かつ  $t \equiv C[r\sigma]$  を満たすときをいい、 $s \rightarrow_{\mathcal{R}} t$  と表す。項  $l\sigma$  をリデックスという。項  $s$  中のリデックス  $\Delta$  を書換えることにより  $t$  が得られるとき、 $s \rightarrow^{\Delta}_{\mathcal{R}} t$  と表す。TRS  $\mathcal{R}$  が無限書換え列  $t_0 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_1 \rightarrow_{\mathcal{R}} t_2 \rightarrow_{\mathcal{R}} \dots$  を持たないとき、**停止性を持つ**という。TRS  $\mathcal{R}$  の書換え  $\rightarrow_{\mathcal{R}}$  の推移的閉包を  $\rightarrow^+_{\mathcal{R}}$  で表す。TRS  $\mathcal{R}$  において、書換え  $t \rightarrow^+_{\mathcal{R}} t$  を**循環**であるという。TRS  $\mathcal{R}$  が循環書換えを持たないとき、**非循環性を持つ**という。 $C[]$  を文脈、 $\sigma$  を代入とする。TRS  $\mathcal{R}$  において、書換え  $t \rightarrow^+_{\mathcal{R}} C[t\sigma]$  を**ループ**という。TRS  $\mathcal{R}$  がループを持たないとき、**非ループ性を持つ**という。TRS  $\mathcal{R}$  において、書換え  $t \rightarrow^+_{\mathcal{R}} C[t]$  を**基礎ループ**という。TRS  $\mathcal{R}$  が基礎ループを持たないとき、**非基礎ループ性を持つ**という。

以下では、組合せ子  $\Delta$  を定数として扱う。また、シグネチャ  $\mathcal{F}(\Delta)$  を定数  $\Delta$  と引数2の関数記号  $a$  だけからなる集合とする。 $\mathcal{F}(\Delta)$  上の変数が出現しないすべての項を**基礎  $\Delta$ -項**といい、基礎  $\Delta$ -項全体の集合を  $CL(\Delta)$  と表す。代入は写像  $\sigma: \mathcal{V} \rightarrow CL(\Delta)$  と制限し、組合せ子  $\Delta$  に対する TRS を  $\mathcal{R}(\Delta)$  と表す。以降の節では、 $CL(\Delta)$  上の書換え関係  $\rightarrow_{\mathcal{R}(\Delta)}$  を考える。

## 2 不動点組合せ子の性質

**定義 2.1**  $\Delta$ -項の長さを次のように再帰的に定義する。

- (1)  $|\Delta| = 1$ ,
- (2)  $|a(X, Y)| = |X| + |Y|$  ( $X, Y \in CL(\Delta)$ )。

**定義 2.2** TRS  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$  のシグネチャ  $\mathcal{F}(\mathbf{Y})$  を定数  $\mathbf{Y}$  と2引数関数記号  $a$  から成る集合とし、TRS  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$  を次のように定義する：

$$\mathcal{R}(\mathbf{Y}) = \{a(\mathbf{Y}, x) \rightarrow a(x, a(\mathbf{Y}, x))\}.$$

**定理 2.3** TRS  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$  は  $CL(\mathbf{Y})$  上で停止性と非基礎ループ性を持たないが、非循環性を持つ。

(証明) TRS  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$  は次のような無限書換え列が存在するから  $CL(\mathbf{Y})$  上で停止性と非基礎ループ性を持たない。

$$a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(\mathbf{Y}, a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(\mathbf{Y}, a(\mathbf{Y}, a(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}))) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} \dots$$

$\mathbf{Y}$ -文脈に関する帰納法より  $CL(\mathbf{Y})$  上の TRS  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$  による書換えで  $\mathbf{Y}$ -項の長さが次のように単調増加することを示すことができる。すなわち、TRS  $\mathcal{R}(\mathbf{Y})$  は非循環性を持つ。

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} t$  ( $s, t \in CL(\mathbf{Y})$ ) とする。ある  $X \in CL(\mathbf{Y})$  に対して、 $s \equiv C[a(\mathbf{Y}, X)]$ 、 $t \equiv C[a(X, a(\mathbf{Y}, X))]$  と表される。このとき、 $|s| < |t|$  を  $\mathbf{Y}$ -文脈に関する帰納法により示す。

- $C[] = \square$  のとき； $s \equiv a(\mathbf{Y}, X) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(X, a(\mathbf{Y}, X)) \equiv t$ 。  $|s| = 1 + |X| < 2 + |X| + 1 = |t|$ 。

- $C[] = a(Z, C'[])$  のとき ;  $s \equiv a(Z, C'[a(\mathbf{Y}, X)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{Y})} a(Z, C'[a(X, a(\mathbf{Y}, X))]) \equiv t$ .  
帰納法の仮定より  $|C'[a(\mathbf{Y}, X)]| < |C'[a(X, a(\mathbf{Y}, X))]|$ . したがって,  $|s| = |Z| + |C'[a(\mathbf{Y}, X)]| < |Z| + |C'[a(X, a(\mathbf{Y}, X))]| = |t|$  が成立する.
- $C[] = a(C'[], Z)$  のとき ; 前項と同様. □

**定義 2.4**  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U})$  のシグネチャ  $\mathcal{F}(\mathbf{U})$  を定数  $\mathbf{U}$  と 2 引数関数記号  $a$  から成る集合とし,  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U})$  を次のように定義する :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}) = \{a(a(\mathbf{U}, x), y) \rightarrow a(y, a(a(x, x), y))\}.$$

**定理 2.5**  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U})$  は  $CL(\mathbf{U})$  上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つ.

(証明)  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U})$  は次のような無限書換え列が存在するから  $CL(\mathbf{U})$  上で停止性と非基礎ループ性を持たない.

$$a(a(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \mathbf{U}) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(\mathbf{U}, a(a(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \mathbf{U})) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(\mathbf{U}, a(\mathbf{U}, a(a(\mathbf{U}, \mathbf{U}), \mathbf{U}))) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} \cdots$$

$\mathbf{U}$ -文脈に関する帰納法より  $CL(\mathbf{U})$  上の  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U})$  による書換えで  $\mathbf{U}$ -項の長さが次のように単調増加することを示すことができる. すなわち,  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U})$  は非循環性を持つ.

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} t$  ( $s, t \in CL(\mathbf{U})$ ) とする. ある  $X, Y \in CL(\mathbf{U})$  に対して,  $s \equiv C[a(a(\mathbf{U}, X), Y)]$ ,  $t \equiv C[a(Y, a(a(X, X), Y))]$  と表される. このとき,  $|s| < |t|$  を  $\mathbf{U}$ -文脈に関する帰納法により示す.

- $C[] = \square$  のとき ;  $s \equiv a(a(\mathbf{U}, X), Y) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(Y, a(a(X, X), Y)) \equiv t$ .  $|s| = 1 + |X| + |Y| < 2|X| + 2|Y| = |t|$ .
- $C[] = a(Z, C'[])$  のとき ;  $s \equiv a(Z, C'[a(a(\mathbf{U}, X), Y)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(\mathbf{U})} a(Z, C'[a(Y, a(a(X, X), Y))]) \equiv t$ . 帰納法の仮定より  $|C'[a(a(\mathbf{U}, X), Y)]| < |C'[a(Y, a(a(X, X), Y))]|$ . したがって,  $|s| = |Z| + |C'[a(a(\mathbf{U}, X), Y)]| < |Z| + |C'[a(Y, a(a(X, X), Y))]| = |t|$  が成立する.
- $C[] = a(C'[], Z)$  のとき ; 前項と同様. □

**定義 2.6**  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$  のシグネチャ  $\mathcal{F}(\mathbf{U}^n)$  を定数  $\mathbf{U}^n$  と 2 引数関数記号  $a$  から成る集合とし,  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$  を次のように定義する :

$$\mathcal{R}(\mathbf{U}^n) = \{a(a(\mathbf{U}^n, x), y) \rightarrow a(y, a(a(\overbrace{a(x, x), x}^{n+1}), y))\} (n \geq 0).$$

このとき,  $\mathbf{U}^0 = \delta[7]$  ( $\mathbf{O}[5], \mathbf{SI}[1]$ ) かつ  $\mathbf{U}^1 = \mathbf{U}[5]$  ( $\mathbf{A}[1]$ ) である.

**定理 2.7**  $TRS \mathcal{R}(\mathbf{U}^n)$  は  $CL(\mathbf{U}^n)$  上で停止性と非基礎ループ性を持たないが, 非循環性を持つ ( $n \geq 0$ ).

## (証明)

- $n = 0$  のとき； $U^0 = O$  より，文献 [3] から  $\mathcal{R}(U^0)$  は停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ。
- $n = 1$  のとき； $U^1 = U$  より，定理 2.5 から  $\mathcal{R}(U^1)$  は停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つ。
- $n > 1$  のとき；TRS  $\mathcal{R}(U^n)$  は次のような無限書換え列が存在するから  $CL(U^n)$  上で停止性と非基礎ループ性を持たない。

$$\begin{aligned} & \underbrace{a(a(U^n, U^n), U^n)}_{\dots} \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} a(U^n, a(a(\dots \overbrace{a(a(U^n, U^n), U^n)}^{n+1}, \dots, U^n), U^n)) \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} \\ & \dots \end{aligned}$$

$U^n$ -文脈に関する帰納法より  $CL(U^n)$  上の TRS  $\mathcal{R}(U^n)$  による書換えで  $U^n$ -項の長さが次のように単調増加することを示すことができる。すなわち，TRS  $\mathcal{R}(U^n)$  は非循環性を持つ。

$s \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} t$  ( $s, t \in CL(U^n)$ ) とする。ある  $X, Y \in CL(U^n)$  に対して， $s \equiv C[a(a(U^n, X), Y)]$ ， $t \equiv C[a(Y, a(a(\dots, a(a(X, X), X), \dots, X), Y))]$  と表される。このとき， $|s| < |t|$  を  $U^n$ -文脈に関する帰納法により示す。

- $C[] = \square$  のとき； $s \equiv a(a(U^n, X), Y) \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} a(Y, a(a(\dots, a(a(X, X), X), \dots, X), Y)) \equiv t$ 。  $|s| = 1 + |X| + |Y| < |X| + n|X| + 2|Y| = |t|$ 。
- $C[] = a(Z, C'[])$  のとき； $s \equiv a(Z, C'[a(a(U^n, X), Y)]) \rightarrow_{\mathcal{R}(U^n)} a(Z, C'[a(Y, a(a(\dots, a(a(X, X), X), \dots, X), Y))]) \equiv t$ 。帰納法の仮定より  $|C'[a(a(U^n, X), Y)]| < |C'[a(U^n, a(a(\dots a(a(U^n, U^n), U^n), \dots, U^n), U^n))]|$ 。したがって， $|s| = |Z| + |C'[a(a(U^n, X), Y)]| < |Z| + |C'[a(U^n, a(a(\dots a(a(U^n, U^n), U^n), \dots, U^n), U^n))]| = |t|$  が成立する。
- $C[] = a(C'[], Z)$  のとき；前項と同様。 □

### 3 むすび

本稿では，不動点組合せ子の非循環性，非基礎ループ性，停止性について述べた。最初に Turing の不動点組合せ子  $U$  が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムが  $U$ -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つことを示した。次に Curry らの不動点組合せ子  $Y$  が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムも  $Y$ -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つことを示した。さらに，組合せ子  $U$  が持つ書換え規則の右辺を一般化した組合せ子  $U^n$  を提案し， $U^n$  が持つ 1 つの書換え規則だけから成る項書換えシステムが  $U^n$ -項上で停止性と非基礎ループ性を持たないが，非循環性を持つことを示した。本稿で得られた結果を表 1 にまとめる。

表 1: 不動点組合せ子を持つ性質

非循環性  $\Leftarrow$  非基礎ループ性  $\Leftarrow$  非ループ性  $\Leftarrow$  停止性  
 非循環性  $\nRightarrow$  非基礎ループ性  $\nRightarrow$  非ループ性  $\nRightarrow$  停止性

組合せ子	非循環性	非基礎ループ性	非ループ性	停止性
$Y[1, 2]$	○	⊗	⊗	×
$U[5](A[1])$	○	⊗	⊗	×
$U^n$ (本研究)	○	⊗	⊗	×

(○ : 成立 (本研究), ⊗ : 不成立 (本研究), × : 不成立)

## 参考文献

- [1] Barendregt, H.P.: The Lambda Calculus, Its Syntax and Semantics, 2nd revised edition, North-Holland (1984).
- [2] Curry, H.B. and Feys, R.: Combinatory Logic, Vol.1, North-Holland (1958).
- [3] 岩見宗弘: 組合せ子の非循環性と関連する性質について, 情報処理学会論文誌 プログラミング, 2(2), pp.97-104 (2009).
- [4] Ohlebusch, E.: Advanced Topics in Term Rewriting, Springer-Verlag (2002).
- [5] Smullyan, R.: To Mock a Mockingbird, Knopf, New York (1985).
- [6] Terese: Term Rewriting Systems, Cambridge University Press (2003).
- [7] Zantema, H.: Normalization of infinite terms, Proc. of 19th International Conf. of Rewriting Techniques and Application, LNCS, 5117, pp.441-455 (2008).